



数学の叡智—その探求と発展—

教養の深さとは、人の考えに共感できる深さにある

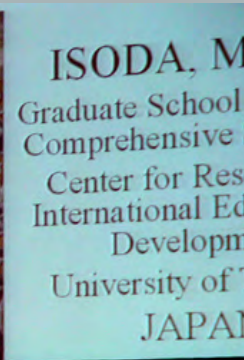
筑波大学人間系教授／教育開発国際協力研究センター

磯田正美 博士(教育学)

APEC21ヶ国授業研究プロジェクト代表者(2006~), 日本書籍出版協会理事長賞(2010),
名誉博士(数学教育学):タイ・コンケン大学(2011), 名誉教授:ペルー・聖イグナティオデロヨラ大学(2014)



詳細は「さくら」



讃岐 勝先生(前教育開発国際協力研究センター)と共同しています。



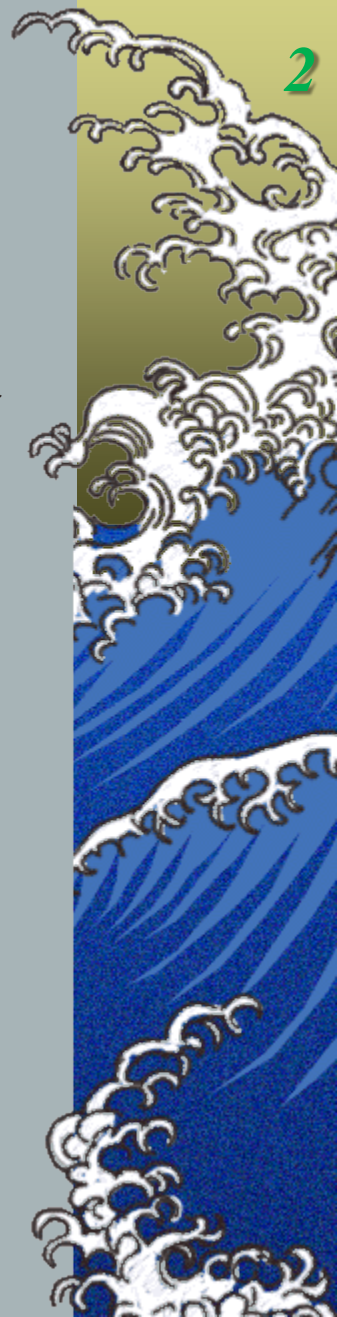
謝辞: 山澤 学先生(図書館研究開発室)、大久保明美主査他図書館特別展ワーキンググループの皆様。

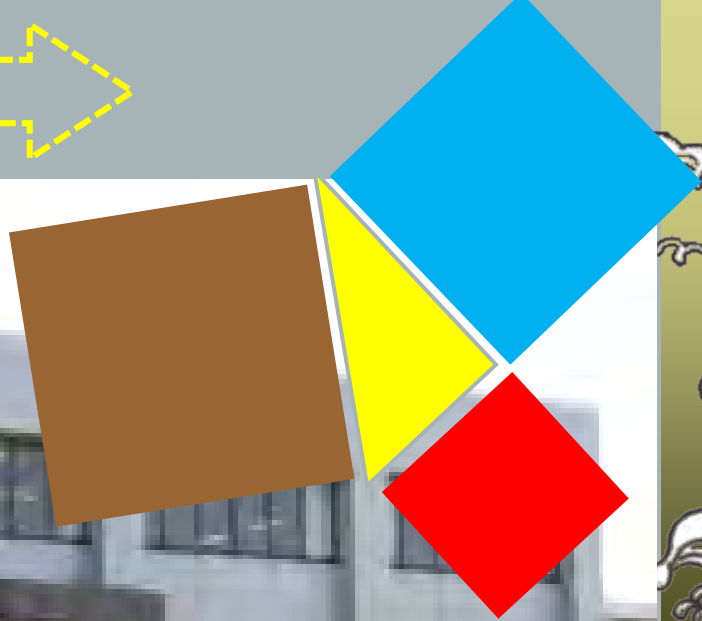
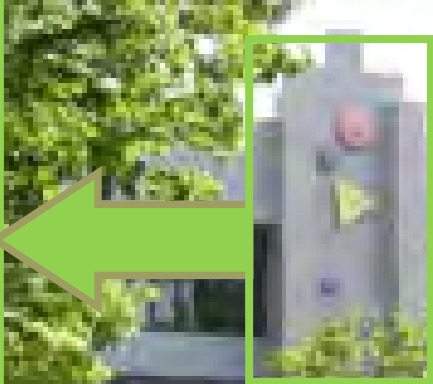
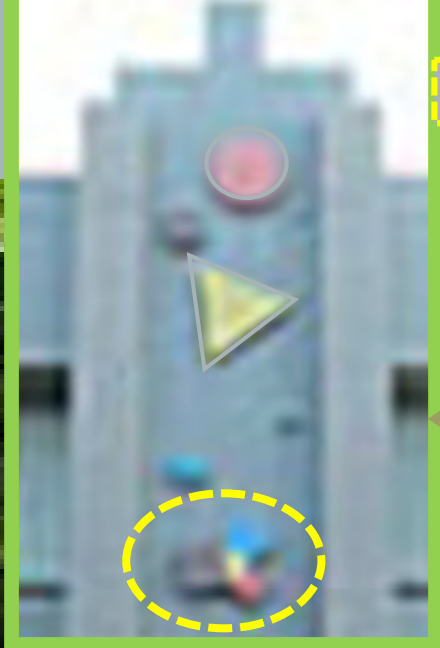


企画者の意図

特別展を通して知っていただきたいこと

- ▲ 何故、数学を勉強するの／したの？
 - ▲ 古代ギリシャからルネッサンス、近代へ
 - ▲ 江戸時代
 - ▲ 今、学校で
- ▲ 今日、貴方が、ご自身の「数学の叡智」を認めるため
 - ▲ 数学のメガネをかける
 - ▲ 数学の愉しさを知る





筑波大学
附属駒場中学校
附属駒場高等学校

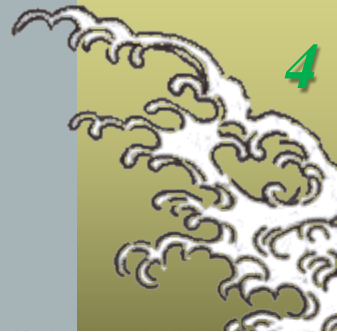
素朴な疑問 1. 何故、
筑駒の入り口に三角や四角？



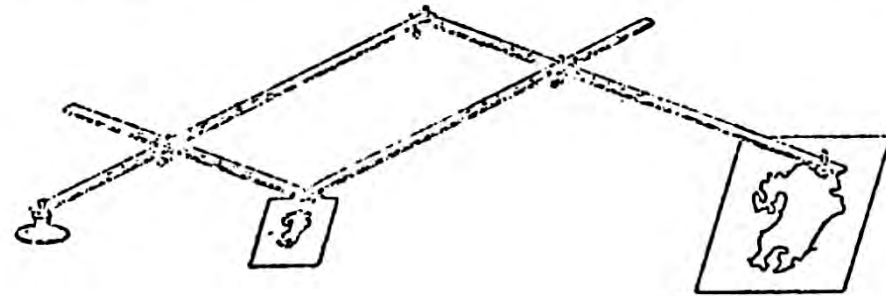
教科書で見たことあるかな？ パンタグラフ



ビヨン(18C)



8. 下ニ示スノハ,圖ヲ擴大シタリ縮小シタリスルトキニ用ヒル器具(縮圖器)デアル。



コノ模型ヲ作ツテ,使用法ヲシラベヨ。

文部省(1943). 数学 中学校用2 第二類, 中学校教科書会社

パンタグラフの語源って知ってる？

ギリシャ語で「すべてを、かくもの」だって

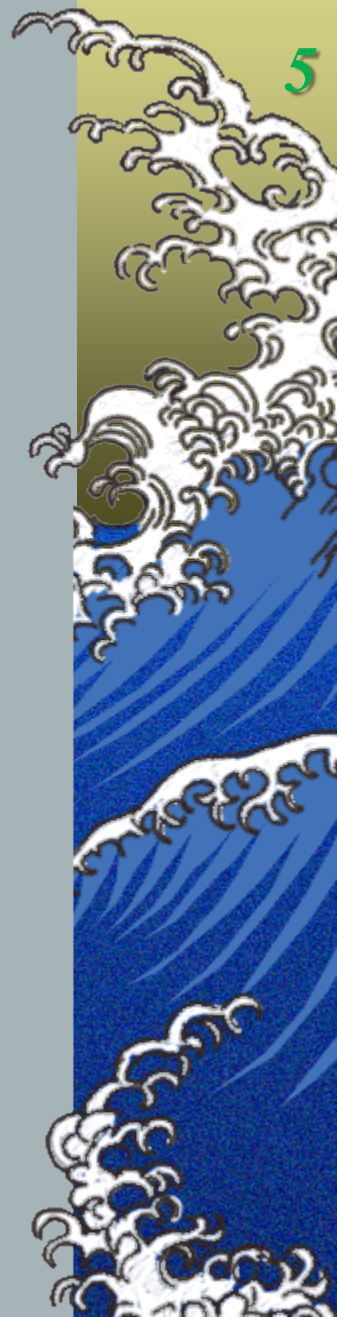
素朴な疑問2. 何それ？





「数学の叡智」を知るために

- ▶ まず、
数学がマセマータと呼ばれた頃
に思いを馳せる
- ▶ そのために
古代ギリシャ人になってみる
その視点としての展示図書！



That's one small step for a man, one giant leap for mankind.

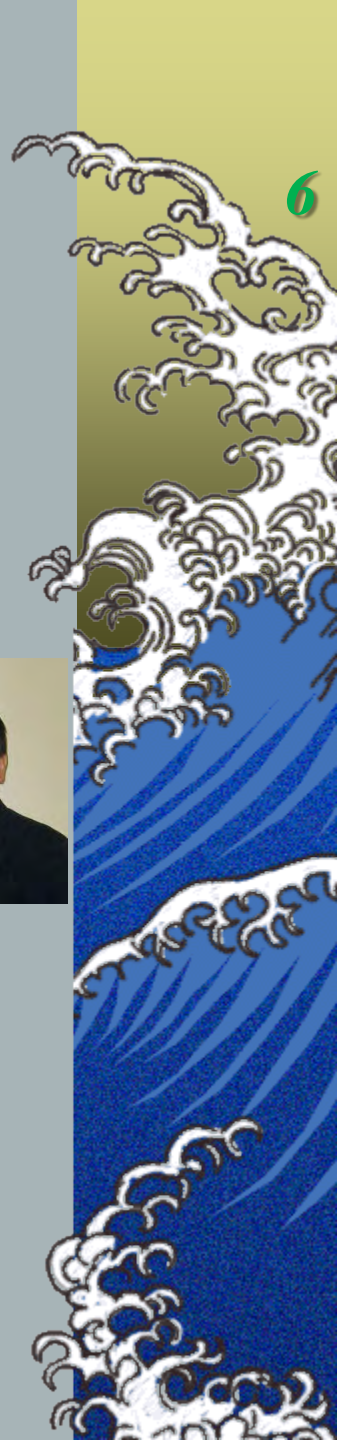
一人の人間にとっては小さな一歩だが、
人類にとっては偉大な飛躍である

ニール・アームストロング(月面で、1969年)

素朴な疑問3. 何故、
足跡を話題に？



オールドリン宇宙飛行士の足跡



我々は恐れることはない、そこに人類(ギリシャ人)の足跡がある。

図録 pp10-11
事典 pp29-30



この二つの絵は、難破して未知の浜辺にたどりついたアリスティポス(ソクラテス学派)一行を表している。同胞の足跡を見つけて.....。

アリスティポス

ウイトウイルス
建築の書

オクスフォード
原論
円錐曲線論



Aristippus Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensium litus, animadvertisset Geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur. Bene speremus, Hominum enim vestigia video.
Vitruv. Architect. lib. 5. Praef.

Aristippus Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensium litus, animadvertisset Geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur. Bene speremus, Hominum enim vestigia video.
Vitruv. Architect. lib. 5. Praef.

グレゴリー版(1703).ユークリッド原論

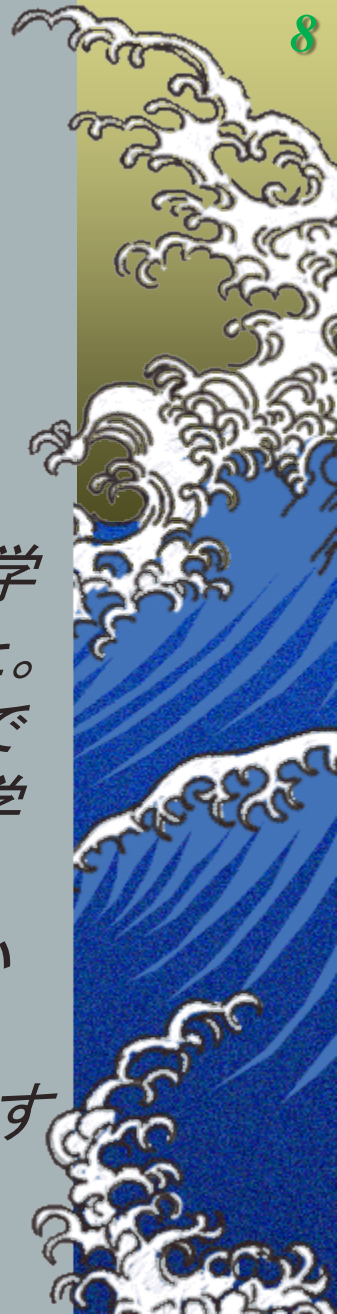
ハーレー版(1710).アポロニウス円錐曲線論

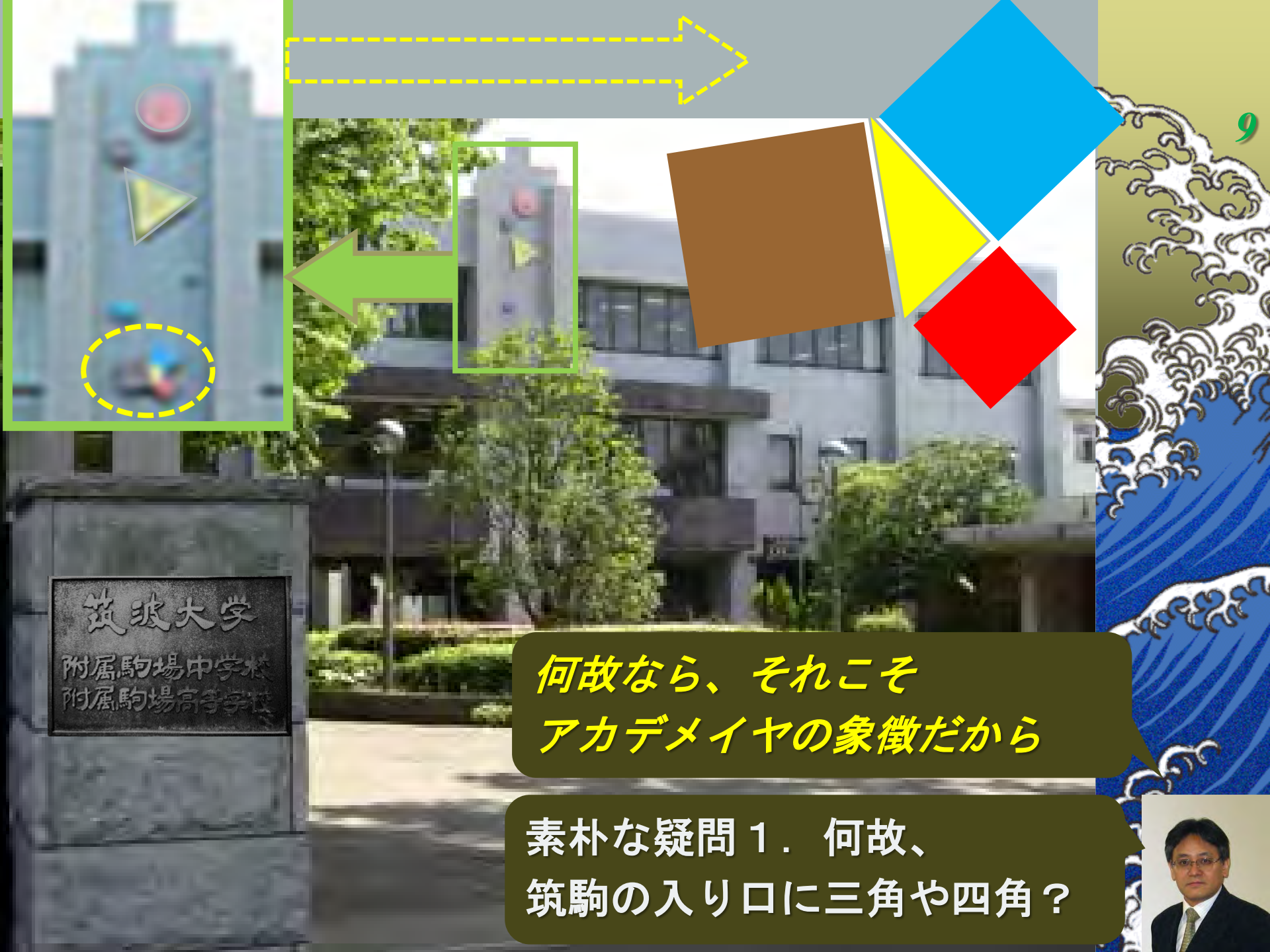
オックスフォード
大学出版
2つの絵の違いは



数学がマセマータと呼ばれた 古代ギリシャでは

- ▶ 数学は、古代地中海のギリシャ語圏では**マセマータ** (**諸学問**)と呼ばれ、**図形**で表象され、**暦を司る天球面上の星々の運動や音楽の音階を表す科学**として重用された。数学は、**音楽**、**天文学**などの諸学、**調和**や**美**を**綴る言葉**でもあった。
- ▶ プラトンが起こした学校「**アカデメイア**」では「**幾何学を学ばざるものは入るべからず**」と幾何を学ぶことを求めた。イデア世界に存在する数学を学ぶことが、ギリシャ語で論理的に考える上で必須と考えられた。そして、その学校名は、今日の**学術の語源**でさえある。
- ▶ 中世には、自由学芸として、**聖書の言葉**、**ラテン語**にかかる「**三学**」すなわち**文法・修辞学・弁証法(論理学)**と、**神の創り賜うた自然を語る言葉**、**数学**にかかる「**四科**」すなわち**算術・幾何・天文・音楽**とが学ばれた。
- ▶ 今日では、**論理学**もまた**数学**である。





筑波大学
附属駒場中学校
附属駒場高等学校

何故なら、それこそ
アカデメイアの象徴だから

素朴な疑問 1. 何故、
筑駒の入り口に三角や四角？



アカデメイアでまず学ぶものの象徴 ユークリッド「原論」



10

何年生で学びましたか？

ピタゴラスの定理は中3

式の展開・因数分解は中3、高1



マセマータこそ学校で学ぶべきもの。

数学こそがすべての学問の基盤。

わかりあう上での基本教養

問1. 子どもはどこにいる？

問2. 数学者はどこにいる？

問3. それは何故？



プラトン

アリストテレス

ユークリッド

ピタゴラス



古代ギリシャで



古代ギリシャで

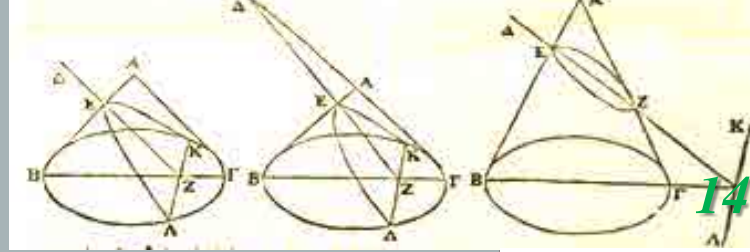


古代ギリシャ人の
「数学の叡智」を認めた
その瞬間

この曲線は
いったい？

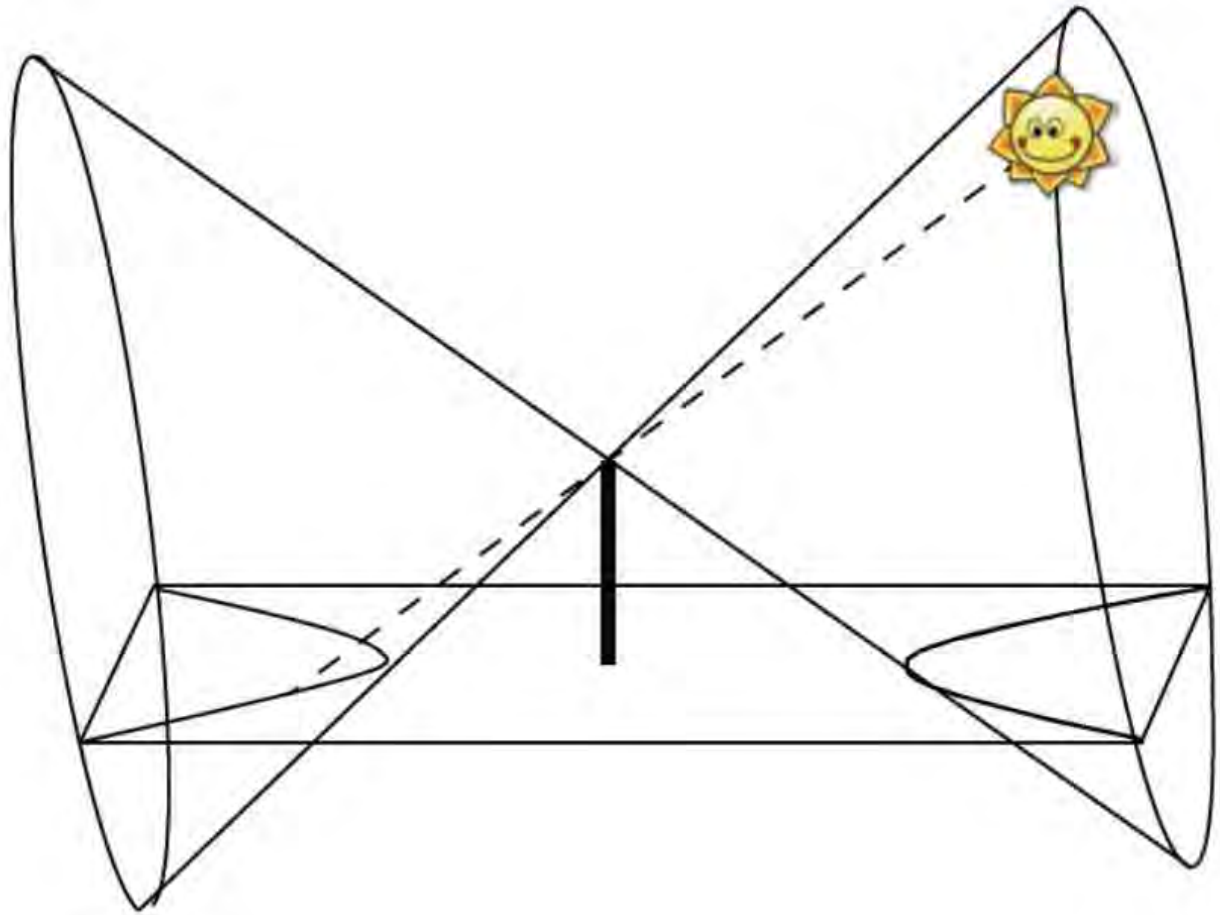


古代ギリシャの天文学の基盤： アポロニウス・円錐曲線論



図録 pp8-9

円錐曲線とは円錐の切断面に現れる曲線で、中学校で学ぶ放物線、双曲線。そして楕円である。教養あるギリシア人は知っていた！



Si recta igitur linea σ quæ sequuntur reliqua ut in theoremate, quod oportuit demonstrasse.

Eucli. ex Camp.

Propositio 6



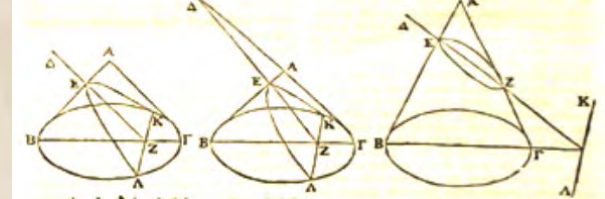
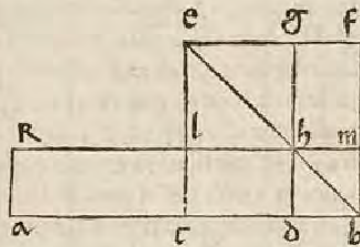
Si recta linea in duo æqualia diuidatur, alia uero ei linea in longū addatur; quod ex ductu totius iam cōpositæ in eam quæ iam adiecta est, cum eo quod ex ductu dimidiæ in seipsam, æquū est ei quadrato quod ab ea quæ constat ex adiecta & dimidiâ in seipsam ducta describitur.

CAMPANVS. Sit linea a b diuisa per æqualia in puncto c, eiq; addatur linea b d: dico q; quadratū c d, quod sit e d e f, æquale est ei quod fit ex tota a d in b d & quadrato c b. Producam in quadrato prædicto e d, diametrū d e, & ducam lineam b g æquidistantē d f, quæ secet diametrū d e in puncto h, à quo h, producā æquidistantē lineæ a b, quæ sit h k, secans d f in puncto m, & c e in puncto l, & producā a k, æquidistantē e l, eritq; per 36 primi, a l, æquale c h. At c h, erit æquale h f, p 43 primi, quare a l, est æquale h f. Ergo addito c m utrobicq; erit a m æquale toti gnomoni circūstanti l g, quare l g addito utrobicq; erit a m cū l g, æquale toti quadrato c f. Et quia utraq; duarū superficies l g & b m est quadrata per correl. 4 huius patet propositū.

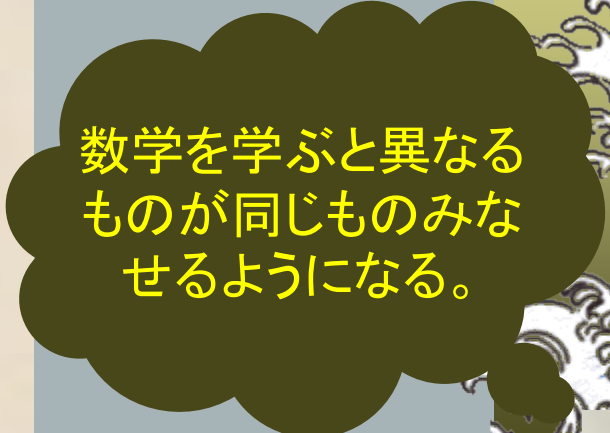
Eucli. ex Zamb.

Theorema 6.

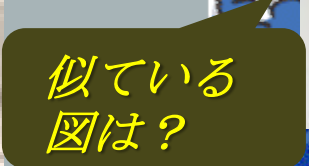
Propositio 6.



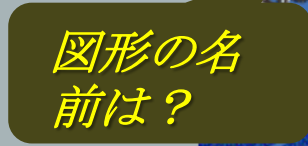
15



数学を学ぶと異なるものが同じものみなせるようになる。

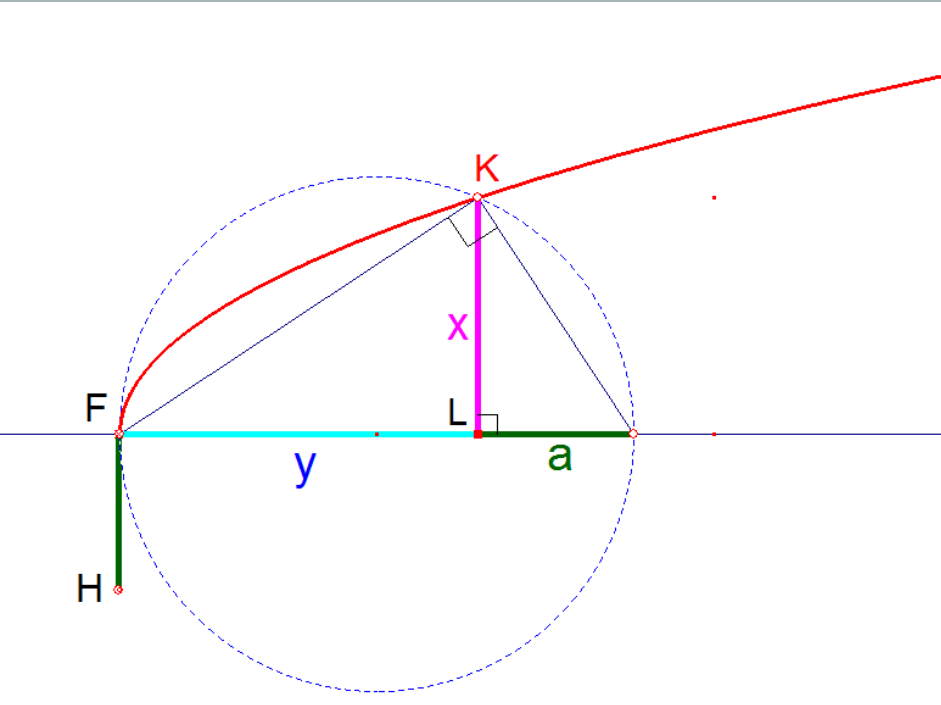


似ている図は？

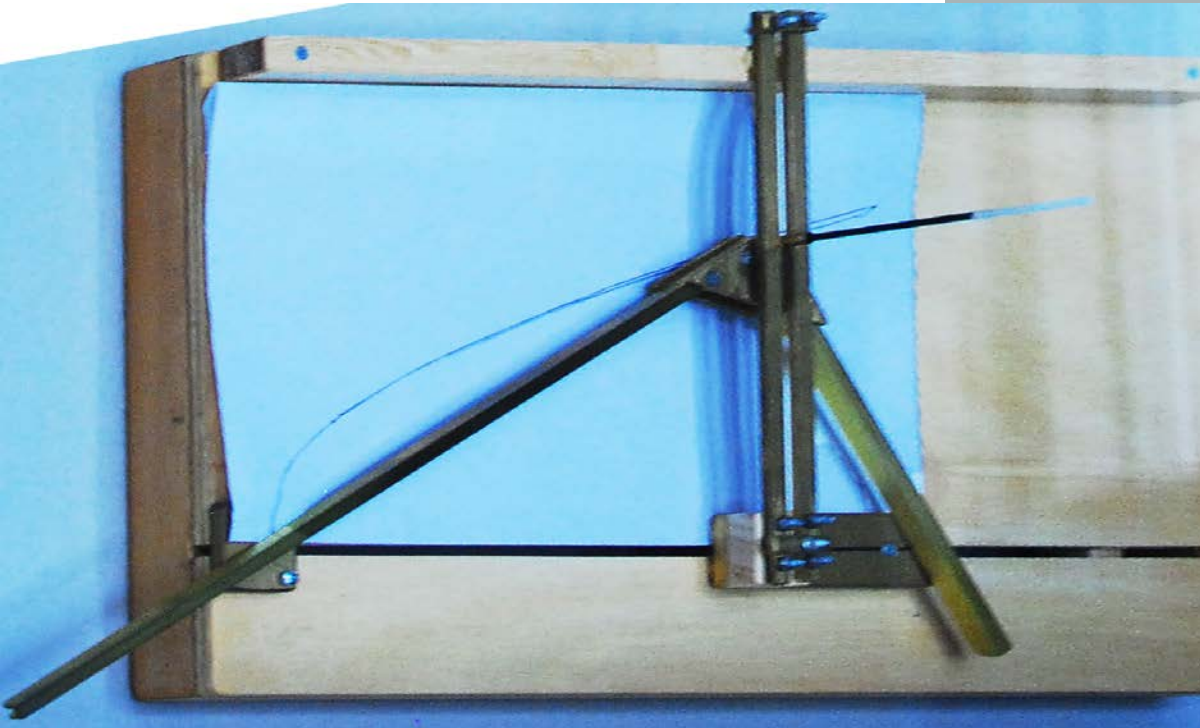


図形の名前は？





相似な直角三
角形が□つ見
えますか？



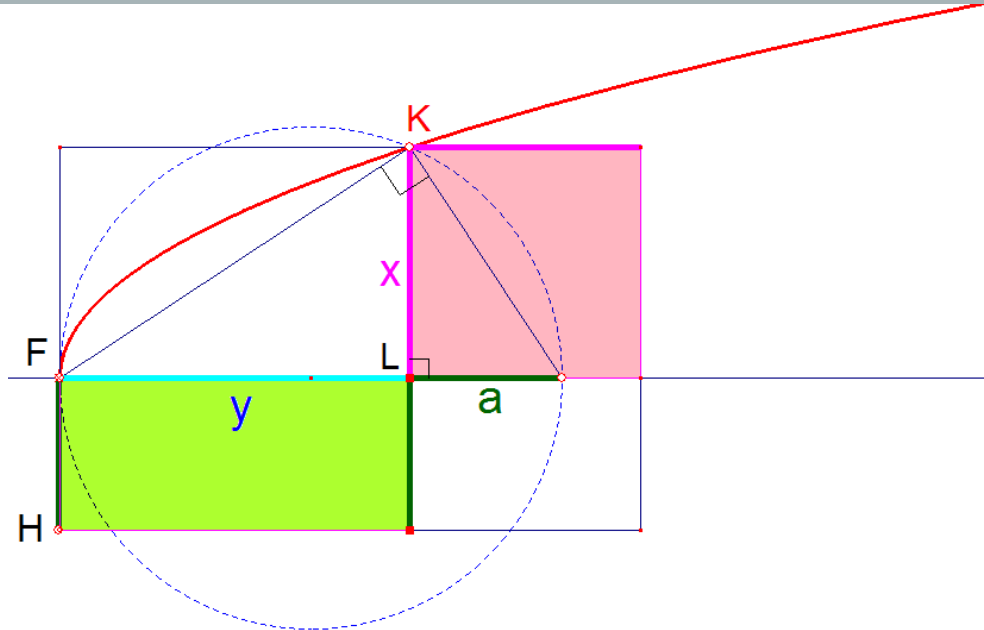
みえれば、放物
線がかけること
がわかる。

何故なら
 $y : x = x : a$
☺

これがわかれば
今日の話はす
べてわかります



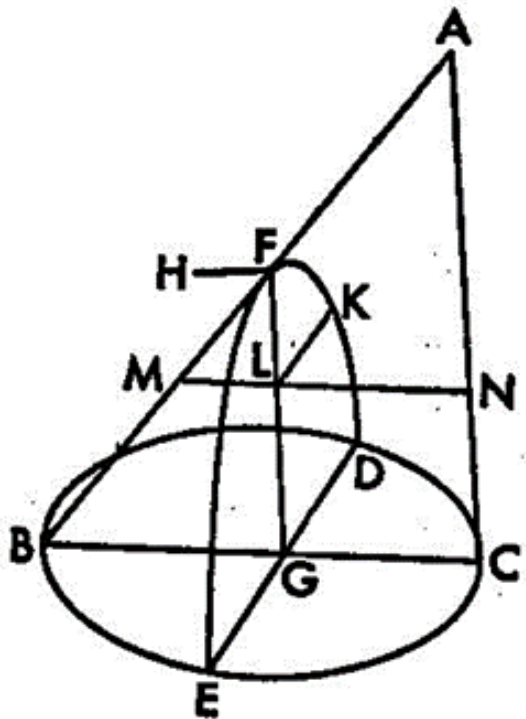
古代ギリシャ人の思考 正方形の面積が長方形にあてはまる



長方形(黄緑の面積)は、正方形(ピンクの面積)にあてはまる(等しい)。

ギリシャ語でパラボラ
とは「あてはまること」

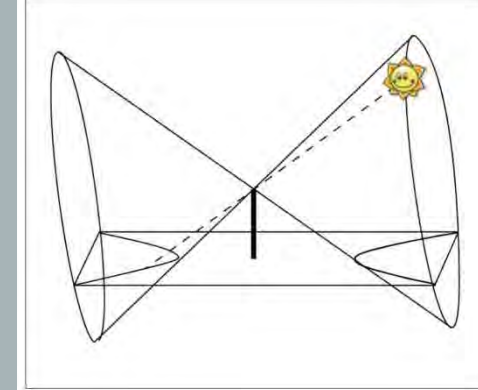
ギリシャ人は
式ではなく図形
で考えた。



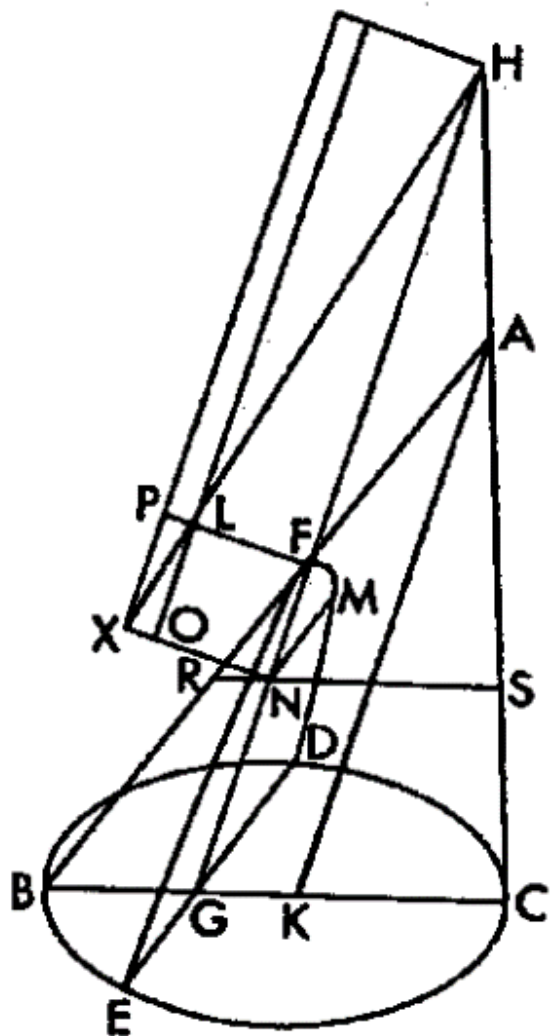
なんだ、面積が等しい、図形がはまることを話題にしていたのか！



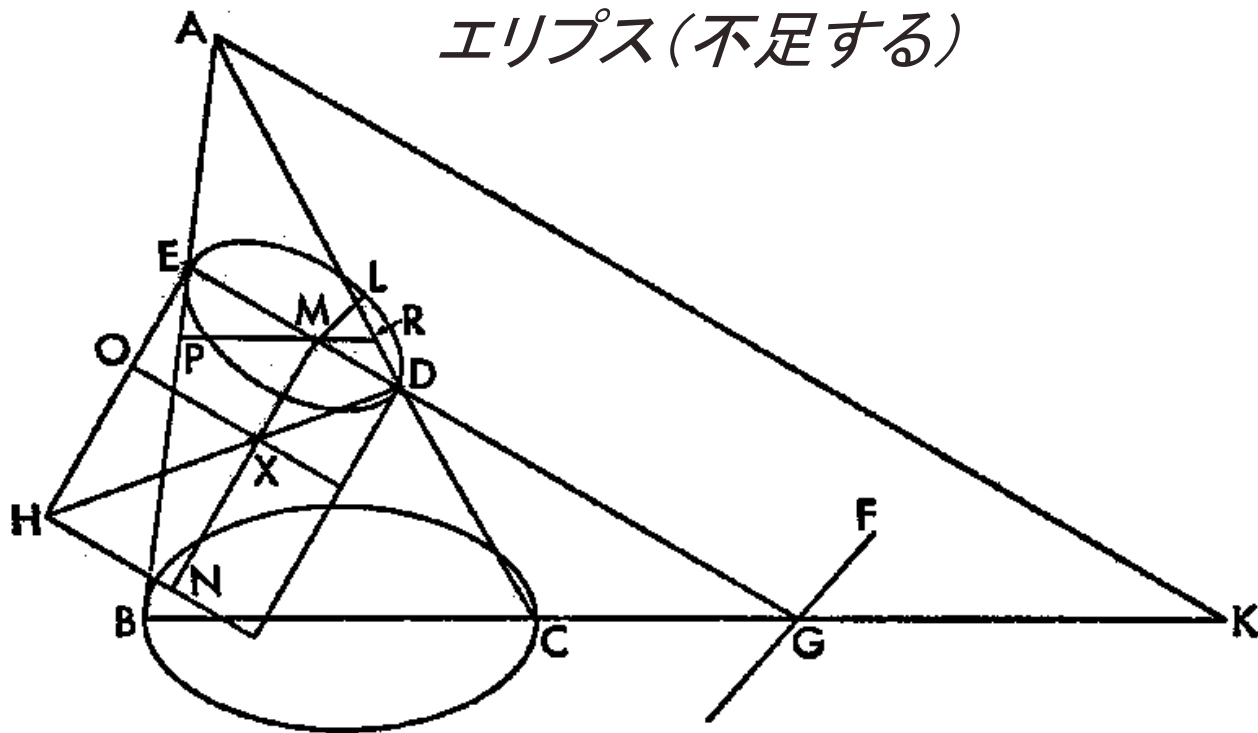
じや等しくないときは
何て言ったの？



ハイパボラ(超過する)



エリプス(不足する)



人類(ギリシャ人)の足跡に隠された「数学の叡智」とは？



同じ絵か、違う絵か？



Ariflippus Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensium litus animadvertisset Geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur. Bene speremus, Hominum enim vestigia video.
Vitruv. Architect. lib. 5. Pref.

グレゴリー版(1703).ユークリッド原論

アリストティポス



ウイトウイルス
建築の書

オクスフォード
原論
円錐曲線論

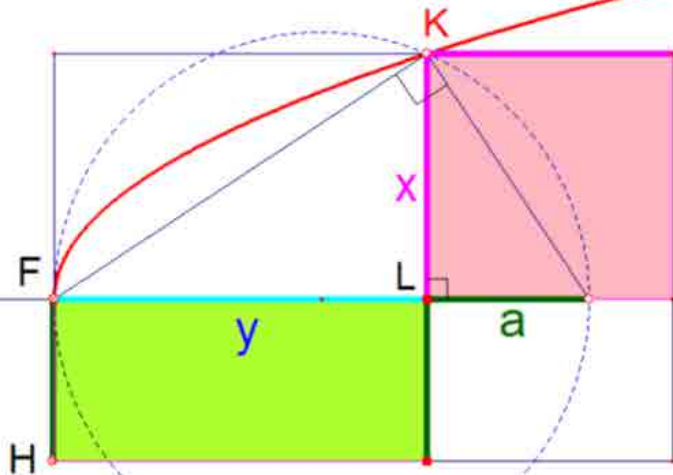
左の直角三角形は放物線を表象している。円錐曲線論の大前提を記している。面積があてはまるか、あてはまらぬかで見れば、同じ話題を取り上げている。

Ariflippus Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensium litus animadvertisset Geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur. Bene speremus, Hominum enim vestigia video.
Vitruv. Architect. lib. 5. Pref.

ハーレー版(1710).アポロニウス円錐曲線論



相似直角三角形に秘められた 叡智



$$y:x = x:a \rightarrow x^2 = ay$$

$$y=2, a=1 \text{ とすれば } x = \sqrt{2}$$

単位正方形の2倍の面積

長方形(黄緑の面積)は、正方形(ピンクの面積)にあてはまる(等しい)。

デルフィ神託：

与えられた立方体の2倍の体積をもつ立方体を作成せよ



さ～みんなでお考えよう！



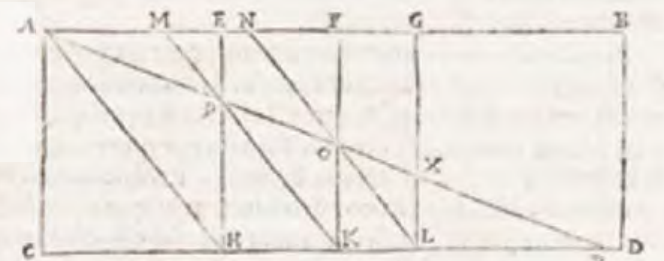
音楽では平均律を生み出すメソラビオ

図で、AとRを線分ARで結ぶ。ARと長方形ACHEの交点をPとする。直角三角形の斜辺MNがPを通るようにその長方形を滑らせる。同様に残りの直角三角形の斜辺NLがOを通るように滑らせる。すると相似な直角三角形がRC上に配置され、例えば台形ACKOと台形PHLXは相似になるなど、様々な比の相当関係がこの図に埋め込まれる。その比の一例として $AC:PH=PH:OK=OK:XL$ を得る。特に $2:x=x:y=y:1$ とすれば、 $2y=x^2$, $y^2=x$ より $y^3=2$ を得る。

MATH. COLL.
A I. PROPOSITIO V.
duas medias proportionales in continua analogia inuenire.

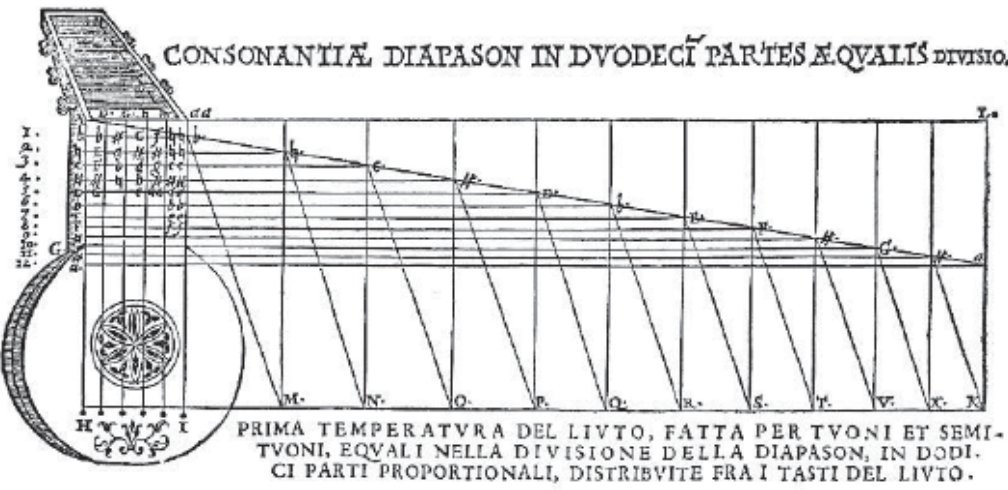
VT ERATOSTHENES.

パップス(4C)
ツアルリーノ(16C)

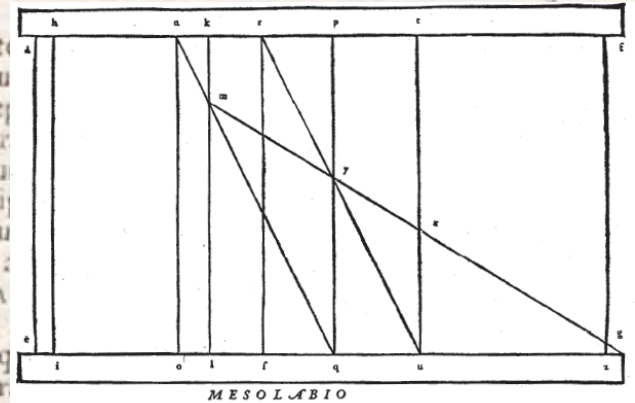


3乗根を解くのに直角三角形が2個配列した。

12乗根を解くには直角三角形を11個配列する必要がある。



Sic plinthium compactum
A C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V X Y Z
orthozonia equalia ABH, MFK,
N...
beant ad puncta BFC: & trian-
gula AEH affixum
alum vero MFK
gulis AB, CD,
ula AB feratur,
tum habente, & vert
Similiter & triangulu
igitur hoc modo praep
ius LX duplam, dista
ta linea constituantur
PROX occurrentem i
positum est, assequetu
CHR ad RK, & PH
X; erunt linearum A
C dupla LX. Cubus
abus ad cubum aliam q
X, & reliqua simili r



古代ギリシャでは**調和**と**美**も数学で表された

ピタゴラス音律 $1 : 2, 2 : 3, 3 : 4$



この絵には
音楽と絵画
における
調和と美が
埋め込まれ
ている。



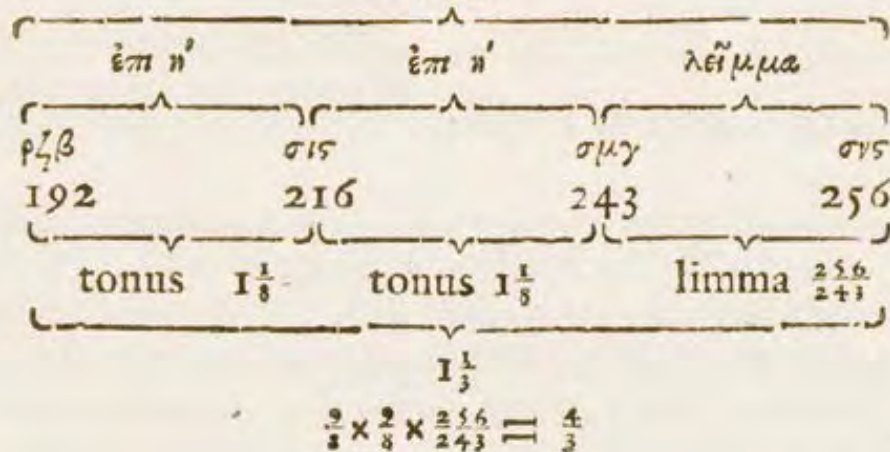


比1 : 2, 2 : 3, 3 : 4 で定義されたピタゴラス音律 による調和



Διάτονον διτονιαῖον.
Diatonum ditoniaum.

ἐπί τε ἰτθ'.

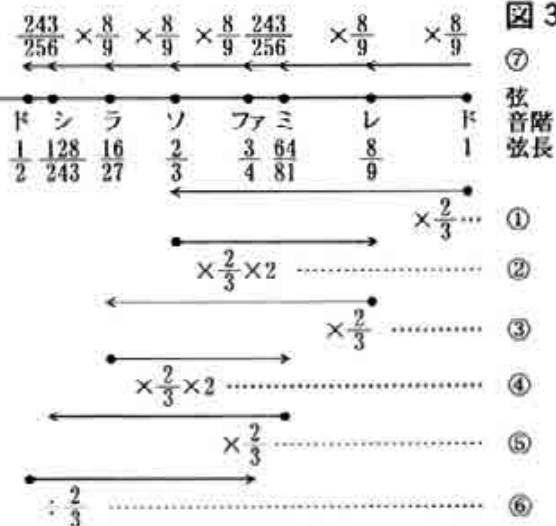


純正5度(3/2倍を基準にした)

音階構成アルゴリズム:

- ① ドから5度あげる(×2/3)。
- ② ソから5度あげ(×2/3), ド₂より高いのでオクターブ下げる(×2)。
- ③, ⑤は①と同じ, ④は②と同じ。
- ⑥ アルゴリズムから外れる純正4度ファは, オクターブ高いド₃から5度下げる。

その結果, ピタゴラス学派にとって適切な分割が得られた(⑦)。

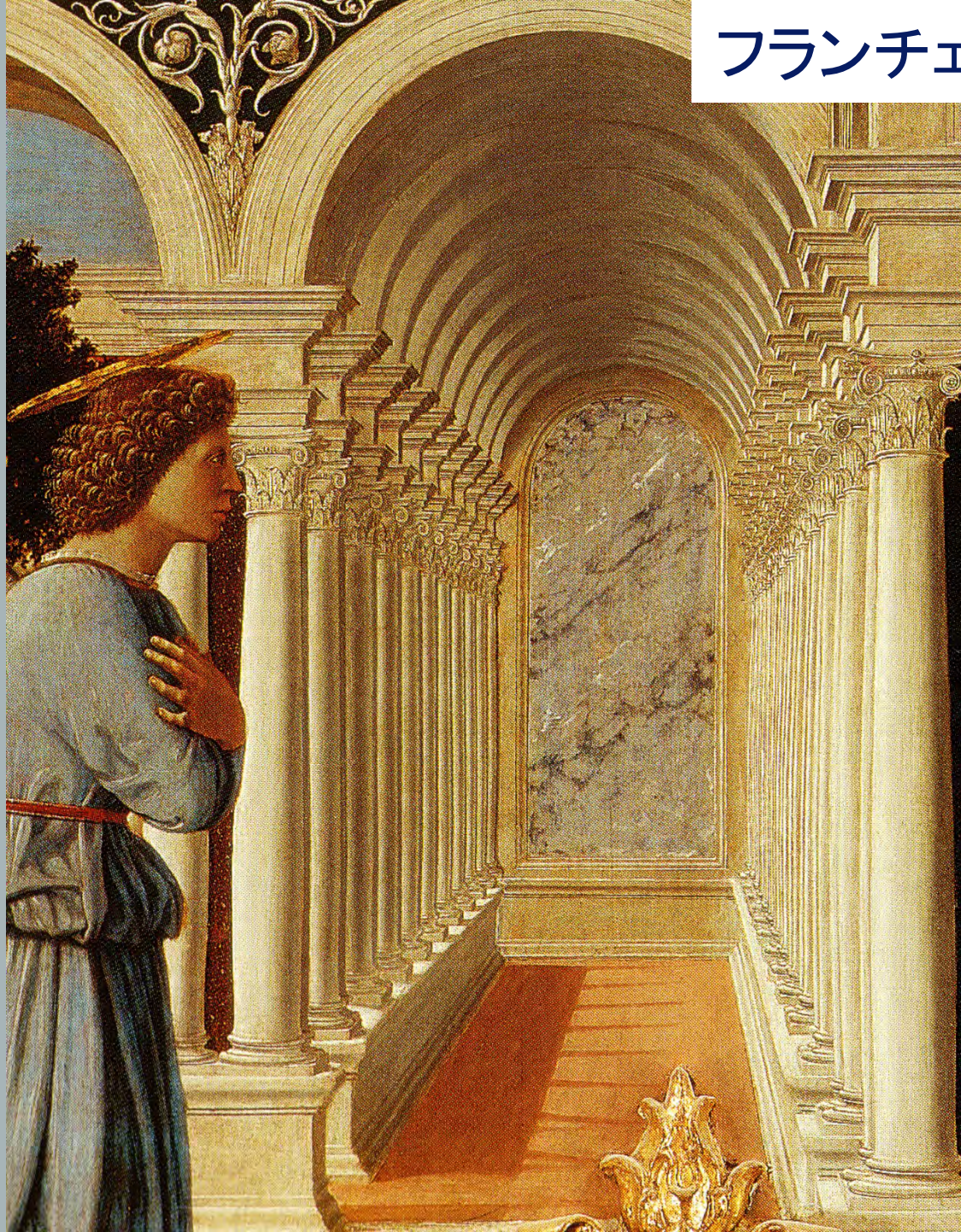


人が自らの目線を
獲得したのが
ルネッサンス

26



フランチェスカ(15C)でさえ



人の視線を取り戻すための道具

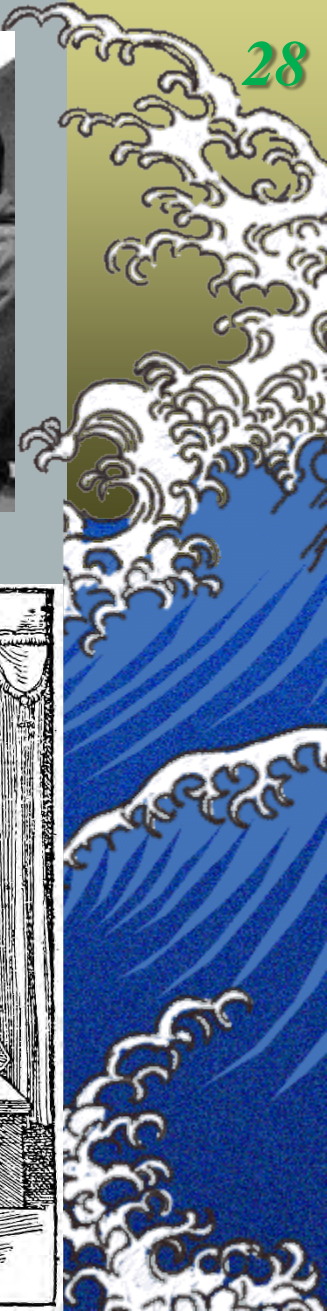
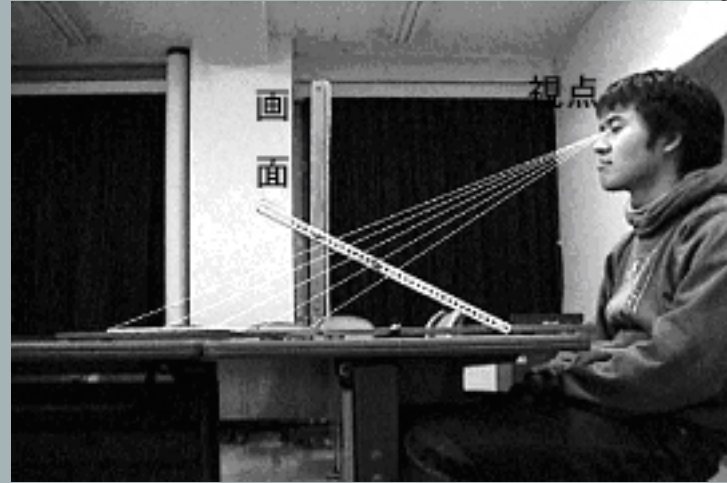
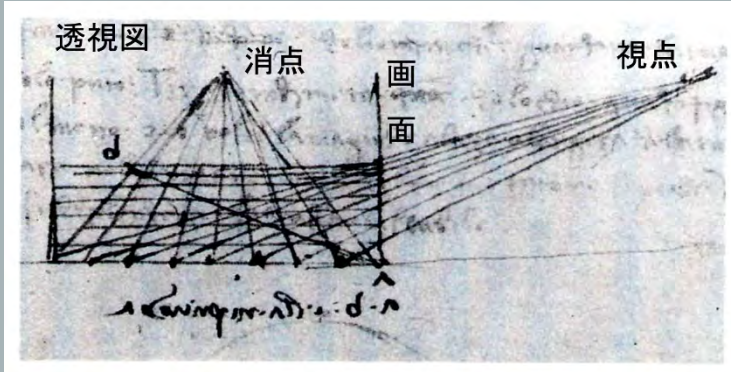
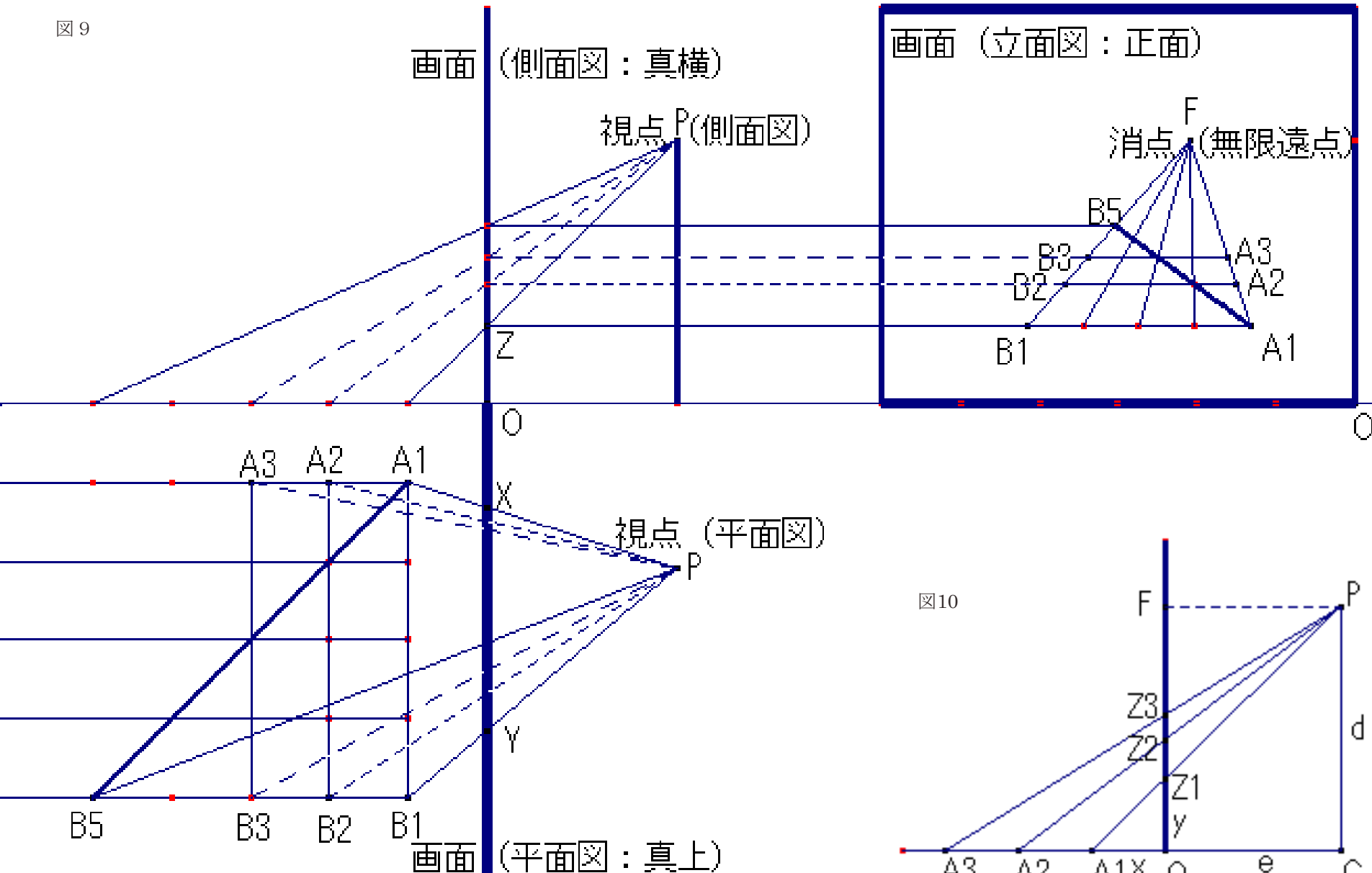
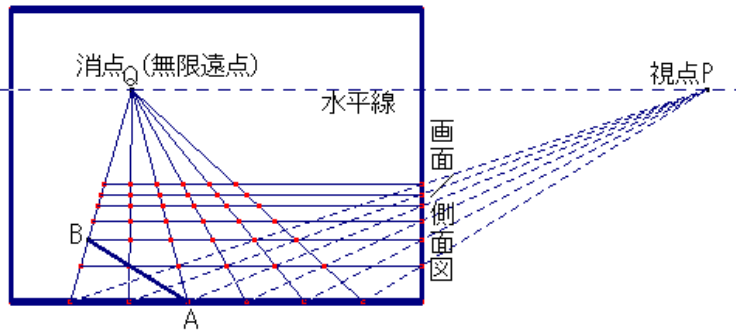


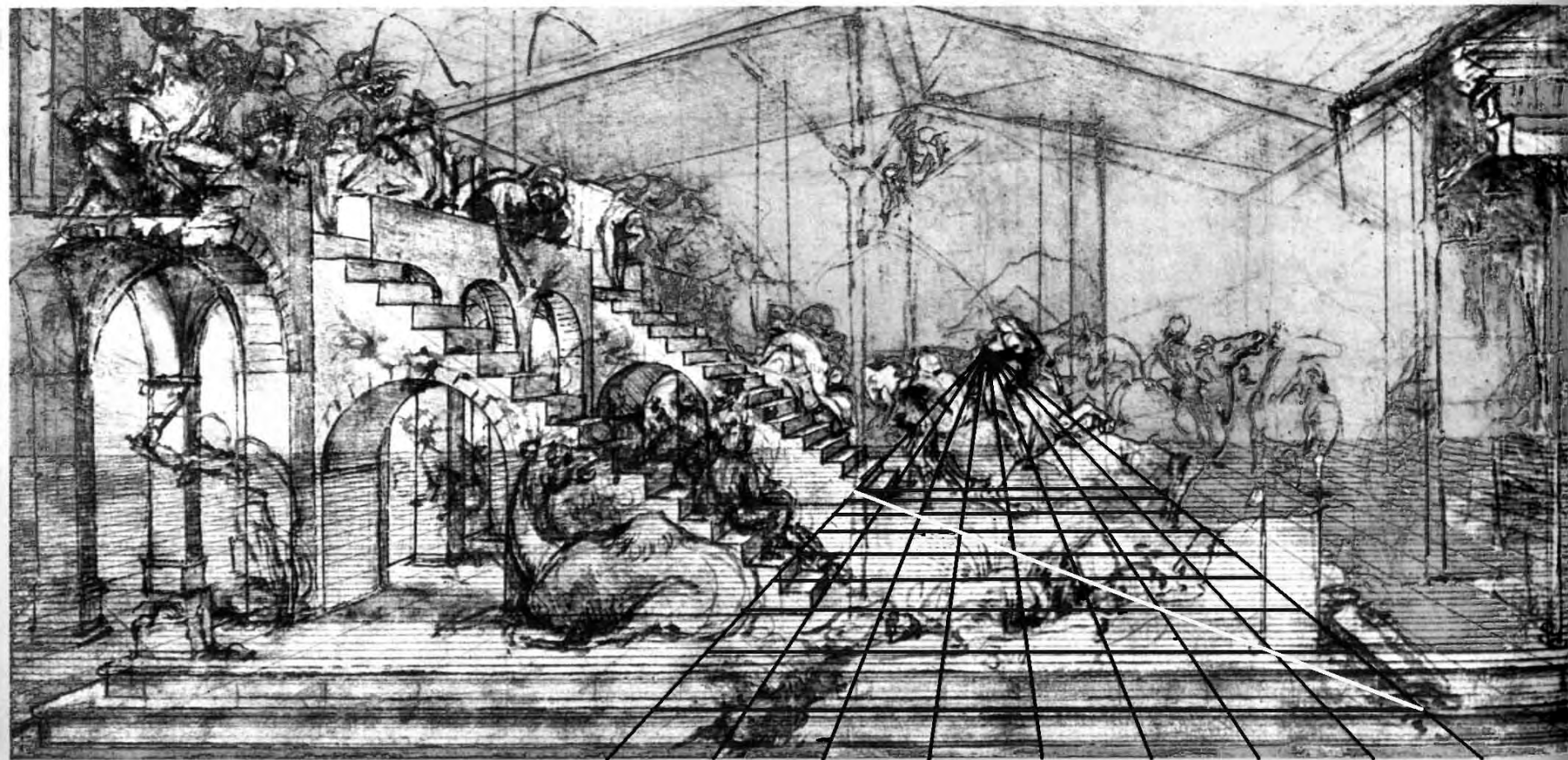
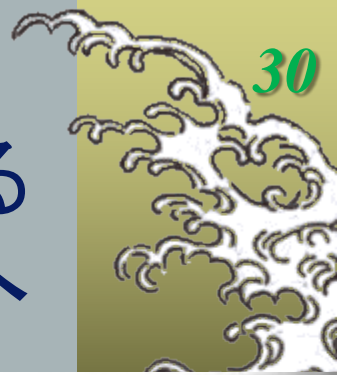
图9



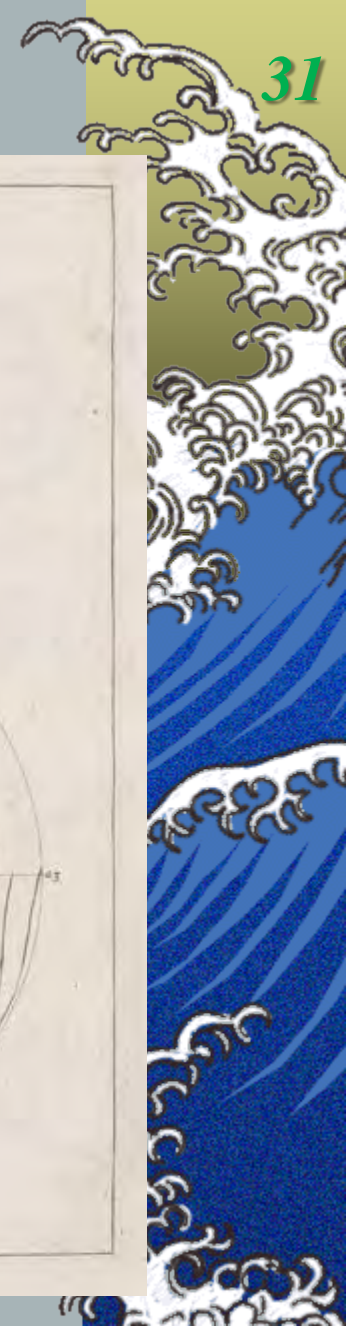
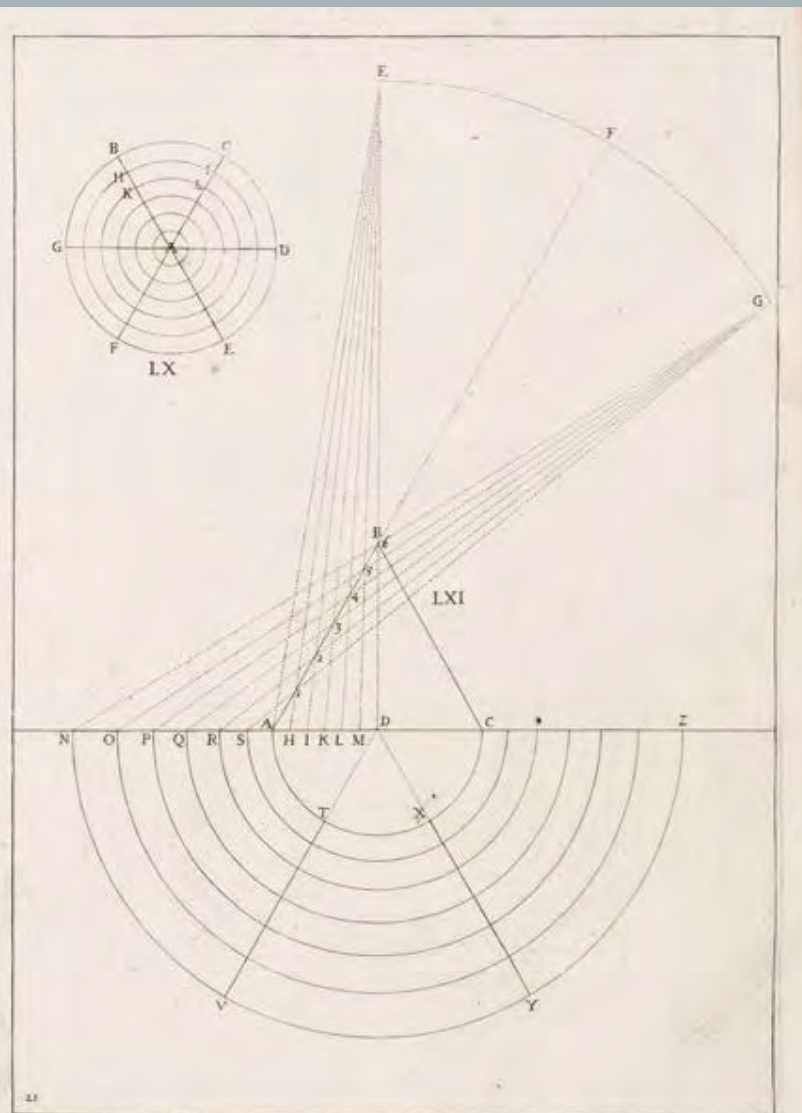
画面 (透視図)



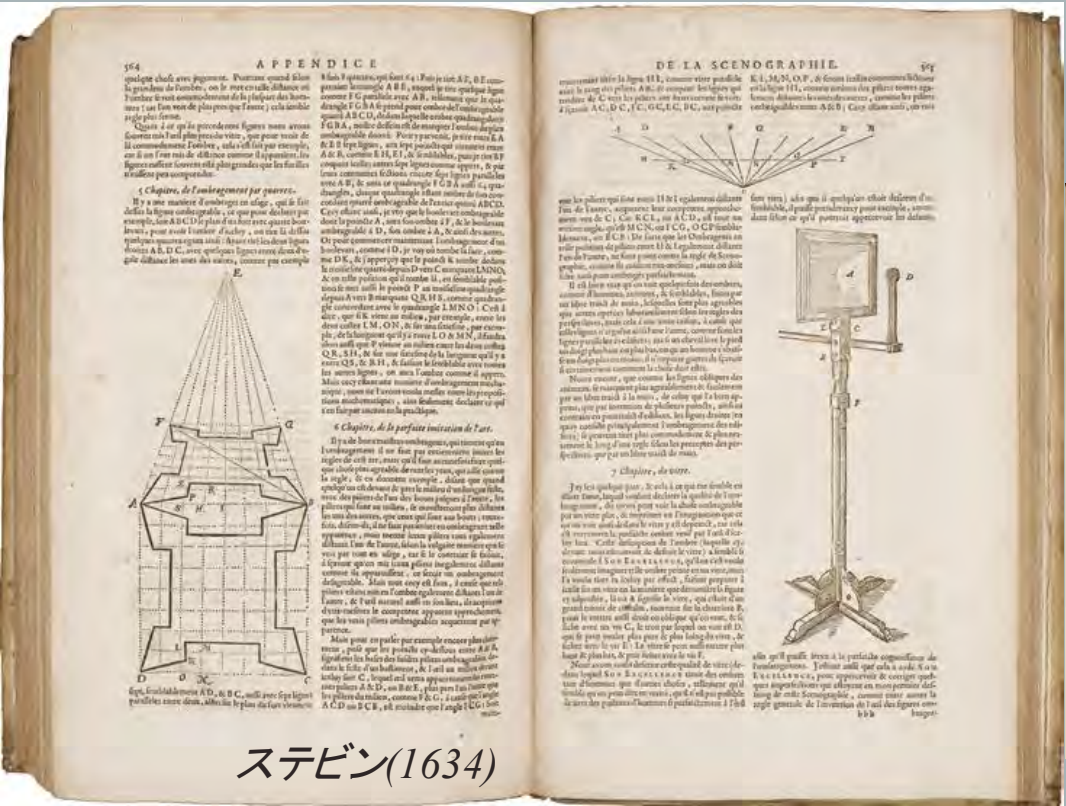
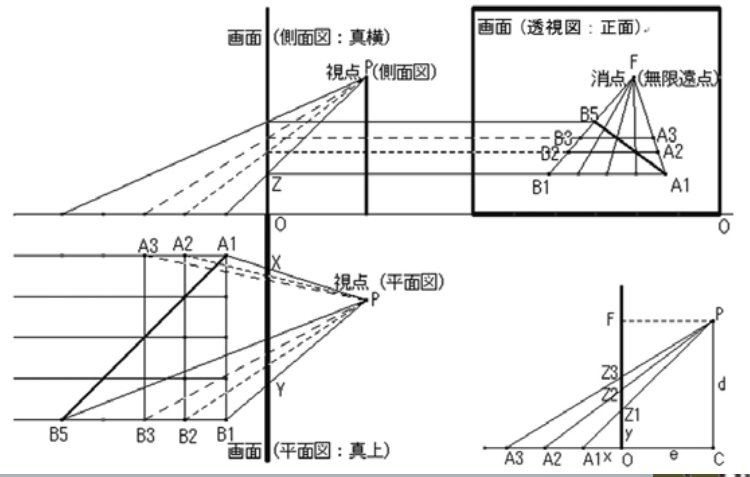
見てかく絵画
から
みなくてもかける
作図画(図学)へ



反転した絵でも作図できる。



数学で構成された美



ステビン(1634)

ギリシャに遠近法?



De Sectione rationis Lib. I. 57

$E\Theta$, ideo totum rectangulum $K\Theta$ in KO majus erit toto ZO in ΘE , five rectangulo ΘN in NO . Unde etiam probatur rectangulum ΘN in NO majus esse rectangulo ΘP in PO ; adeoque rectangulum ΘE in ZO majus erit rectangulo ΘP in PO ; quare ratio ΘP ad ΘB minor erit ratione ZO ad PO . Con-

アポロニウス(BC3C) 比例切断

もし比(火)がなければ～

道具を工夫すれば計算不要！

33



The destruction of the Parthenon in 1687. After F. Fanelli. (British Museum)





教養の深さとは、人の考えに共感できる深さにある

わかるとは、何をすることか？

まずは、読んで...。 浮かぶ問い。 誰が？ なぜ？

▲ 何か？ 理解

▲ これは、何の問題だろう。この解法のすばらしさは何だろう。

▲ 誰が何故？ 他者の立場の想定

▲ この問題は、当時の人々にどのような価値をもったのだろう。

▲ それまでの自分と比べて？ 自己理解

▲ 何故、日本では、この問題を代数で教えないのだろう。

アカデメイアでは何故、数学を基礎教養としたのか？



ここから先は時間切れでした「曲線の事典」共立(2009)をご覧ください。

普遍数学への道：デカルトVSパスカル

「昔の幾何学者(ギリシャ人)たちは、一種の解析を用い、それをすべての問題(作図題)の解決にひろく適用していたのであるが、ただ彼らはそれを後世の者に対して出し惜しみしていた。そして、現在、代数とよばれるところの数論の一種が盛んであるが、これは古人(昔の幾何学者)が図形について行っていたこと(解析：結論を仮定する)を、数についてやろうとするもの(代数での解析：未知数の存在を仮定する)なのである。～中略～何故それらがそうなっているのか、それらはいかにして発見されたのか、という精神そのものに明示することは、彼らが十分にやっていると思えなかった。～中略～彼らは何かわれわれの時代の通常の数学とは全く異なった数学を知っていたのに違いない。」デカルト『精神指導の規則』山本信訳

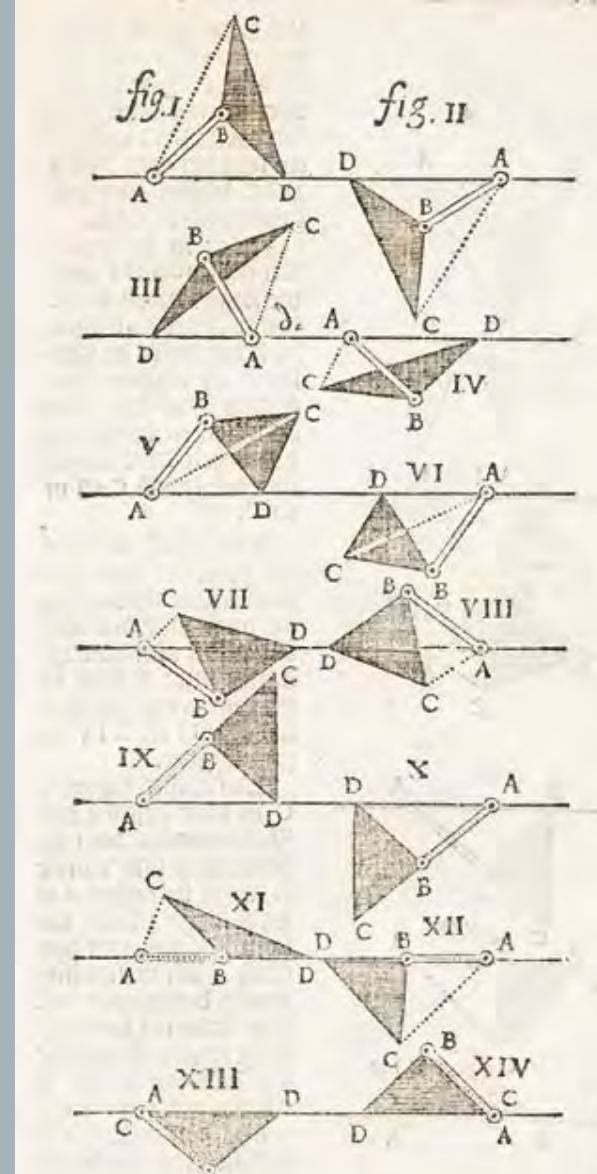
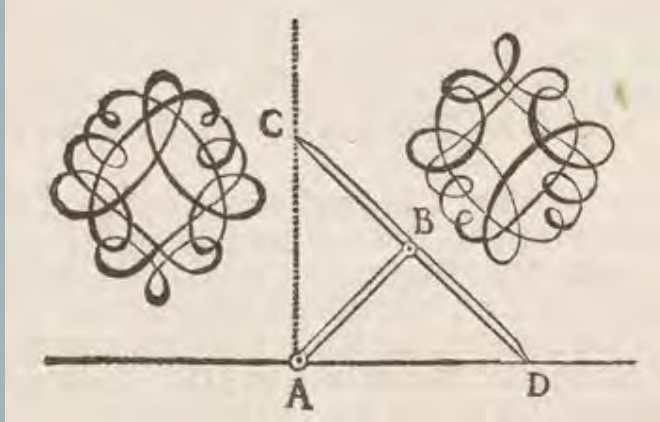
「デカルト、大づかみにこう言うべきである。「これは形と運動から成っている」と。なぜなら、それはほんとうだからである。だが、それがどういふ形や運動であるかを言い、機械を構成してみせるのは、滑稽である。なぜなら、そういうことは、無益であり、不確実であり、苦しいからである。そして、たとえそれがほんとうであったにしても、われわれは、あらゆる哲学が一時間の労にも値するとは思わない」パスカル『パンセ』前田陽一・由木康訳、

35

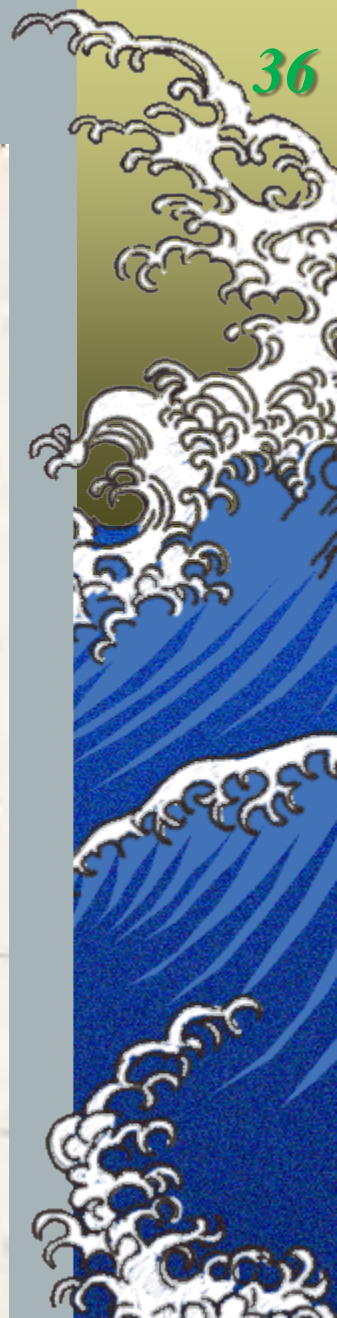
パスカルはデカルトの何を忌避したのか？

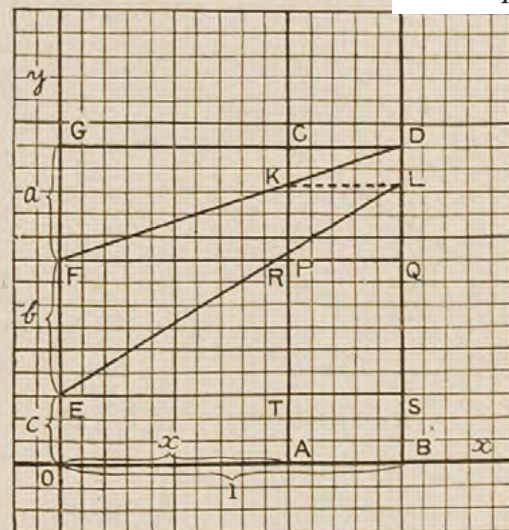


実験数学： デカルトの支援者スコーテンの場合



- ▶ $AB=CB=DB$ のとき、
点Dが直線運動、A
が固定した場合の
点Cの軌跡は？
- ▶ CBDが二等辺三角
形ならば？

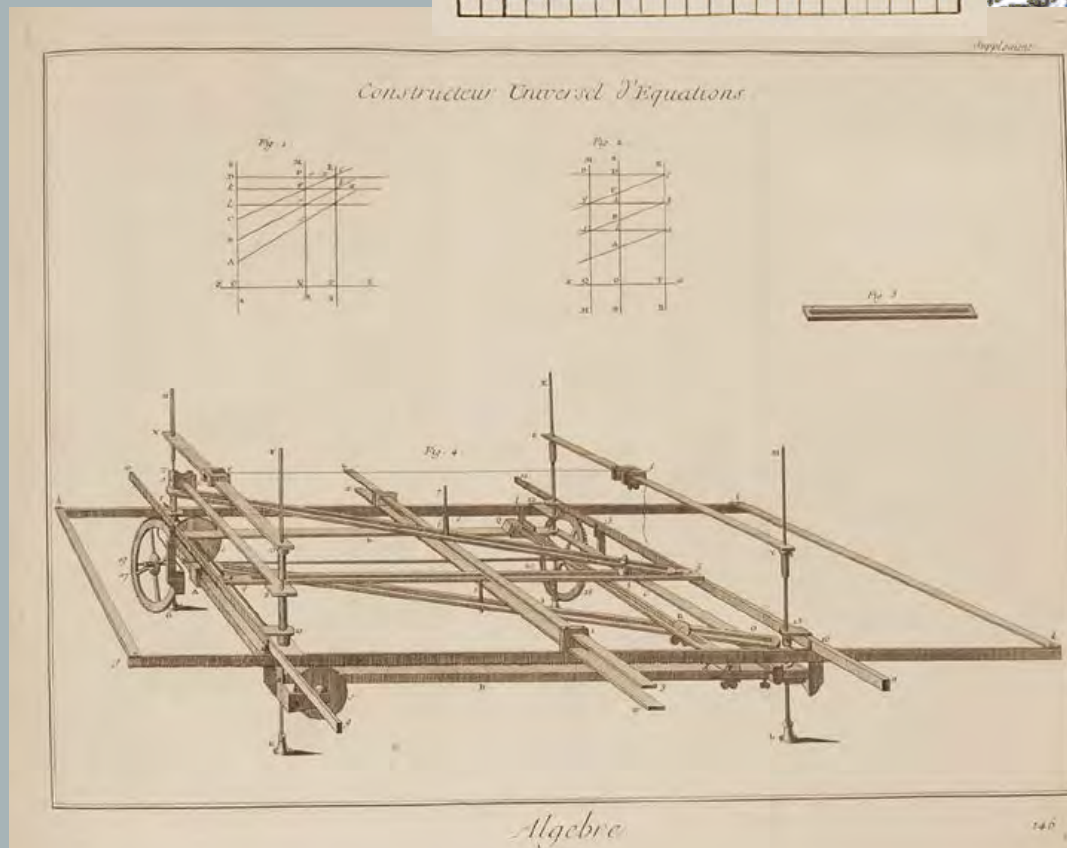
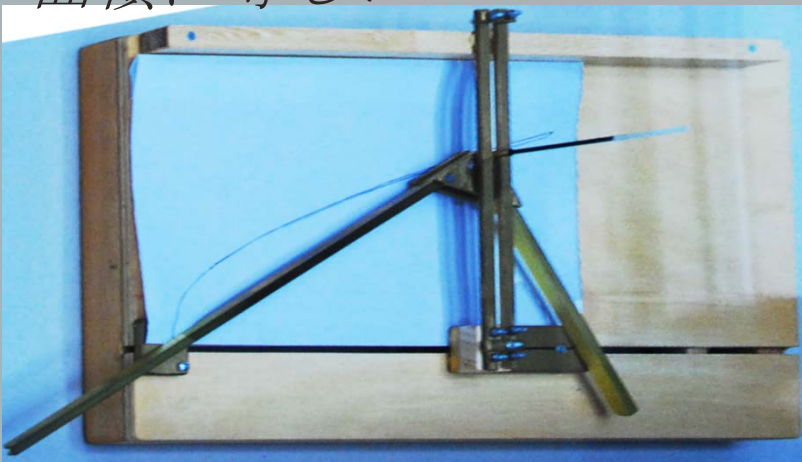




$y=ax^2+bx+c$

さらなる代数化 図形を代数で定義する 作図器が変わる

正方形の面積が長方形の
面積に等しい



新数学の展開

39



ドモアブル
確率へ展開

Each of the propositions, 'X is Y,' and 'X is not Y,' may be subdivided into two species: the *universal*, in which every possible case is included; and the *particular*, in which it is not meant to be asserted that the affirmation or negation is universal. The four species of proposition are then as follows, each being marked with the letter by which writers on logic have always distinguished it.

A	<i>Universal Affirmative</i>	Every X is	Y
E	<i>Universal Negative</i>	No X is	Y
I	<i>Particular Affirmative</i>	Some Xs are	Ys
O	<i>Particular Negative</i>	Some Xs are not	Ys

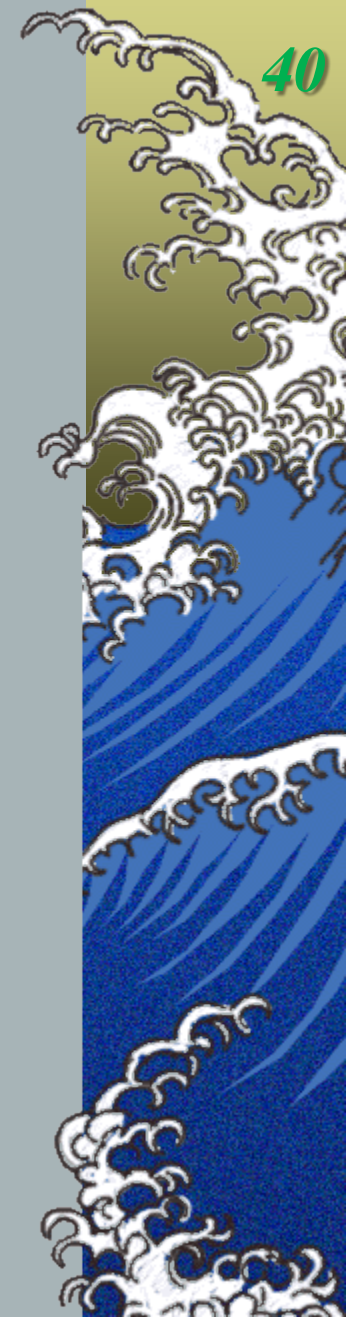
ドモルガン
形式論理へ
展開

和算とその発展

- ▶ 世界で唯一無二の書
- ▶ その書を基盤に和算が発展

こちらは、以下で解説しています

- ▶ <http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/museum/TGSW2015/>



勘者御伽双紙

41



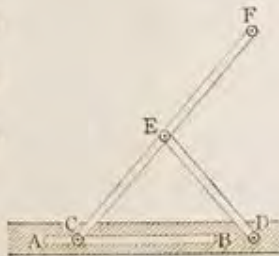
どこかでみたことはいかないか？

みたことある
でしょう。
何回出てきた
かな？



問 4. 右ノ圖デ、

AB ハ溝ニナツテキテ、
C ガコレニ沿ツテ往復
スルヤウニナツテキル。
マタ、棒ノ長サ CE, EF,
ED ハ等シクナツテキ



ル。C ガ往復運動ヲスルト、F ハドンナ運動
ヲスルカ。

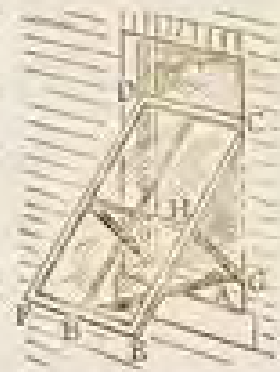
問 5. 右ノ圖デ、齒車 B ノ外ノ齒車 A トカ
ミ合ツテヨロガル。

マタ、B ノ直徑ハチヤ
ウド A ノ半徑ニ等シ
クナツテキル。



B ノ周上ノ點 P ハ、
ドンナ運動ヲスルカ。

1. 右ノ圖ノヤウナ構造ノ窓ガアル。支
柱ノ棒 GH ハ縦ノ柱ノ真中ニトリツケテア
ラテ、棒 AB ツ突キ出スト、ガ
ラス戸ノ上ノ柱 CD ハ溝ニ
沿ツテ下ガルヤウニナツテ
キル。



コノトキ、下ノ柱 EF ハド
シナ運動ヲスルカ。

2. 次ノ頁ノ圖デ $\angle XOY$ ハ直角デアル。
AB ハ長サ 6cm ノ棒デ、ソノ兩端ハツレゾレコ



マセマータとしての数学は
2000年を経てなお変わることなく学校で教えられて
いる。であればこそ。

ラファエロ(1510)
アテネの学堂

43

マセマータとは諸学問、
数学はメガネ、数学は諸学の言葉
それこそ学校で学ぶべきもの。
数学こそがすべての学問の基盤。
わかりあう上での基本教養



ユークリッド

ピタゴラス

ギャラリートークは讃岐先生

質疑は磯田も！



ギリシャ語で「すべてを、かくもの」って？

参考文献

磯田正美, マリアバルトリニブッシ編、
田端毅、讃岐勝磯田正美著

「曲線の事典」共立出版、2009

平成27年附属図書館特別展「数学
の叡智：その探求と発展」

<http://www.tulips.tsukuba.ac.jp/exhibition/2015math/index.html>

数学の歴史博物館

[http://math-
info.criced.tsukuba.ac.jp/museum/](http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/museum/)

平成27年度附属図書館特別展「数学
の叡智：その探求と発展」図録。
筑波大学附属図書館

